2023 年 2 月 4 日実施

●学力試験　数学●

1 《正解》

(1) $(\mathbf{2}-\boldsymbol{x})(\mathbf{2}-\boldsymbol{y})(\mathbf{2}-\boldsymbol{z})$　(2) $\mathbf{\dfrac{5}{9}}$　(3) $\boldsymbol{x}=\mathbf{\dfrac{4}{3}},\ \mathbf{4}$　(4) **4 通り**

(5) $\mathbf{9}\boldsymbol{x}^2-\mathbf{12}\boldsymbol{x}+\mathbf{7}=\mathbf{0}$　(6) **10**　(7) $-\mathbf{\dfrac{1}{2}}$　(8) $-\mathbf{\dfrac{16}{3}}$

《解き方》

(1) (与式) $=-x\{4-2(y+z)+yz\}+\{8-4(y+z)+2yz\}$

$$=(2-x)\{4-2(y+z)+yz\}=(2-x)\{-y(2-z)+(4-2z)\}=(\mathbf{2}-\boldsymbol{x})(\mathbf{2}-\boldsymbol{y})(\mathbf{2}-\boldsymbol{z})$$

(2) 余弦定理より $\cos A=\dfrac{3^2+6^2-5^2}{2\cdot 3\cdot 6}=\mathbf{\dfrac{5}{9}}$

(3) $x-2\geqq 0$ と仮定して $x-2=\dfrac{1}{2}x$ を解くと $x=4$ となり，これは仮定を満たす。また

$x-2<0$ と仮定して $-(x-2)=\dfrac{1}{2}x$ を解くと $x=\dfrac{4}{3}$ となり，これも仮定を満たす。

したがって解は $\boldsymbol{x}=\mathbf{4},\ \mathbf{\dfrac{4}{3}}$

(4) 円形に並ぶ 8 個の玉の中で，2 個の赤玉の間にある白玉の個数は 0 個，1 個，2 個，3 個の 4 通りである。したがって並べ方は **4 通り**

(5) $z=\dfrac{2+\sqrt{3}\,i}{3}$，$w=\dfrac{2-\sqrt{3}\,i}{3}$ とおくと，$z+w=\dfrac{4}{3}$，$zw=\dfrac{7}{9}$ となるので，z，w を解とする

2 次方程式の 1 つは $x^2-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{7}{9}=0$ である。整数係数にするために両辺に 9 をかけて

$\mathbf{9}\boldsymbol{x}^2-\mathbf{12}\boldsymbol{x}+\mathbf{7}=\mathbf{0}$

(6) 不等式は $1000<2^m$ と同値である。これを満たす最小の整数は $m=\mathbf{10}$

(7) $\sin\left(3\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)=-\mathbf{\dfrac{1}{2}}$

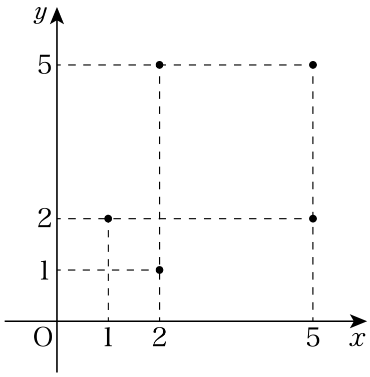
(8) 垂直条件は $\left(\vec{a}+t\vec{b}\right)\cdot\vec{a}=0$ であり，左辺は $\left|\vec{a}\right|^2+t\vec{a}\cdot\vec{b}=4^2+3t$ となるので，$t=-\mathbf{\dfrac{16}{3}}$

2 《解答例》

(1) x 軸と 2 つの共有点を持つことから，判別式の条件として $D=(-4)^2-4k=4(4-k)>0$，すなわち $k<4$ となる。さらに 2 つの共有点が正の側にあることから切片が正となるので $k>0$ となる。したがって $\mathbf{0}<\boldsymbol{k}<\mathbf{4}$

(2) $C=180^\circ-(A+B)$ と加法定理を用いると，

$$\tan C=\tan\{180^\circ-(A+B)\}=\tan\{-(A+B)\}=-\tan(A+B)=-\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\mathbf{\frac{7}{11}}$$



$\boxed{3}$ 《解答例》

⑴　右図の通り。

⑵　平均は $\overline{x}=\dfrac{1}{5}(1+2+2+5+5)=3$ なので，分散は

$$s_x^2=\frac{1}{5}\{(1-3)^2+\cdots+(5-3)^2\}=\frac{1}{5}(4+1+1+4+4)=\boldsymbol{\frac{14}{5}}$$

⑶　y のデータは x のデータの入れ替えになっているので，

$\overline{y}=\overline{x}=6$，$s_y^2=s_x^2=\dfrac{14}{5}$ である。また，共分散は

$$s_{xy}=\frac{1}{5}\{(1-3)\cdot(2-3)+\cdots+(5-3)\cdot(5-3)\}=\frac{1}{5}\{2+2+(-2)+(-2)+4\}=\boldsymbol{\frac{4}{5}}$$

となる。よって相関係数は $r=\dfrac{s_{xy}}{s_x s_y}=\dfrac{4/5}{\sqrt{14/5}\sqrt{14/5}}=\boldsymbol{\dfrac{2}{7}}$

$\boxed{4}$ 《解答例》

⑴　△ASO と△ABP が相似であることから，AS：SB＝AO：OP＝**2：1**

⑵　△RSO と△RBC が相似であることから，RS：SB＝RO：OC＝**2：3** である。これと⑴を合わせると，**AR：RS：SB＝4：2：3**

⑶　△ABP において，メネラウスの定理より $\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}\cdot\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CP}}\cdot\dfrac{\mathrm{PO}}{\mathrm{OA}}=1$ で，⑵より左辺は $\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CP}}\cdot\dfrac{1}{2}$

となる。したがって $\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CP}}=\dfrac{5}{2}$，すなわち BC：CP＝5：2 なので，**BP：PC＝3：2**

$\boxed{5}$ 《解答例》

⑴　$f(x)=x^2+2x+2$ とおくと，$f'(x)=2x+2$ より $f'(2)=6$ となる。よって，放物線 $y=f(x)$ 上の点（2，10）における接線の方程式は $y=6(x-2)+10=\boldsymbol{6x-2}$

⑵　面積は

$$\int_0^2\{f(x)-(6x-2)\}\,dx=\int_0^2(x^2-4x+4)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\right]_0^2=\boldsymbol{\frac{8}{3}}$$

⑶　a，b，c を定数として $f(x)=ax^2+bx+c$ とおくと，

条件より $f(1)=a+b+c=4$，$f'(1)=2a+b=2$，$f'(-1)=-2a+b=-10$ となる。

これらを連立させて $a=3$，$b=-4$，$c=5$ と求められる。したがって，$\boldsymbol{f(x)=3x^2-4x+5}$