2023年2月5日実施

●学力試験　数学●

1 《正解》

(1) $\boldsymbol{x^4-8x^2-9}$　(2) $\boldsymbol{\dfrac{21}{4}\sqrt{3}}$　(3) $\boldsymbol{x=\pm 3}$　(4) $\boldsymbol{\sqrt{6}}$

(5) $\boldsymbol{a=2,\ b=-1}$　(6) $\boldsymbol{\dfrac{5}{2}p-q-2}$

(7) **積 ab が奇数ならば，a，b はともに奇数である。**　(8) $\boldsymbol{n^2+2n}$

《解き方》

(1) $(x^2-3^2)(x^2+1)=\boldsymbol{x^4-8x^2-9}$

(2) $\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 7\sin 60^\circ=\boldsymbol{\dfrac{21}{4}\sqrt{3}}$

(3) $x\geqq 0$ と仮定して $x^2-x-6=0$ を解くと $x=3$，-2 となり，このうち $x=3$ のみが仮定を満たす。また $x<0$ と仮定して $x^2+x-6=0$ を解くと $x=-3$，2 となり，このうち $x=-3$ のみが仮定を満たす。したがって解は $\boldsymbol{x=\pm 3}$

(4) 平均は $\overline{x}=\dfrac{1}{5}(11+13+7+14+10)=11$ なので，分散は

$s^2=\dfrac{1}{5}\{(11-11)^2+\cdots+(10-11)^2\}=\dfrac{1}{5}(0+4+16+9+1)=6$ となる。したがって

標準偏差は $s=\boldsymbol{\sqrt{6}}$

(5) 両辺に $x(x+1)$ をかけて整理すると，恒等式 $(a+b-1)x+b+1=0$ を得るので，$a+b-1=0$，$b+1=0$ となる。これを解いて $\boldsymbol{a=2,\ b=-1}$

(6) $\log_2\dfrac{x^2\sqrt{x}}{4y}=2\log_2 x+\dfrac{1}{2}\log_2 x-2-\log_2 y=\boldsymbol{\dfrac{5}{2}p-q-2}$

(7) 「少なくとも一方が偶数」の否定は「両方が奇数」であり，「積 ab が奇数」の否定は「積 ab が偶数」である。

(8) 等差数列の和の公式より，（与式）$=2\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1=2\cdot\dfrac{1}{2}n(n+1)+n=\boldsymbol{n^2+2n}$

2 《解答例》

(1) 倍角の公式より，$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=\boldsymbol{2t^2-1}$　加法定理より，

$\cos 3\alpha=\cos\alpha\cos 2\alpha-\sin\alpha\sin 2\alpha=\cos\alpha\cos 2\alpha-2\cos\alpha\sin^2\alpha=t(2t^2-1)-2t(1-t^2)=\boldsymbol{4t^3-3t}$

(2) （与式）$=n^3-7n-6=n^3-(n+6n)-6=n(n^2-1)-6(n+1)=n(n+1)(n-1)-6(n+1)$ となる。ここで任意の整数 n に対して $n+1$，n，$n-1$ のいずれか1つは3の倍数となるので，$n(n+1)(n-1)$ は3の倍数である。よって n^3-7n-6 は3の倍数である。

3 《解答例》

⑴　選んだ製品が良品である確率は $1-0.01=0.99$ であり，良品が不合格である確率は 0.01 なので，求める確率は $0.99\times0.01=\mathbf{0.0099}$

⑵　選んだ製品が不良品でかつ不合格である確率は $0.01\times(1-0.02)=0.0098$ なので，⑴と合わせて，求める確率は $0.0099+0.0098=\mathbf{0.0197}$

⑶　⑴，⑵より，求める確率は $\dfrac{0.0099}{0.0197}=\dfrac{\mathbf{99}}{\mathbf{197}}$

4 《解答例》

⑴　直線の方程式は $y=\dfrac{2-0}{5-1}(x-1)+0=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{x}-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

⑵　線分 AB の中点は $\left(\dfrac{1+5}{2},\ \dfrac{0+2}{2}\right)=(3,\ 1)$ であり，この点を通り直線 $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$ に垂直な直線は $y=-2(x-3)+1=\boldsymbol{-2x+7}$

⑶　円の方程式を $x^2+y^2+ax+by+c=0$ とおく。外接円は点 A，B，C を通るから，連立方程式 $1+a+c=0$，$25+4+5a+2b+c=0$，$9+36+3a+6b+c=0$ が成り立つ。これを解いて $a=-4$，$b=-6$，$c=3$ が得られる。よって円の方程式は $\boldsymbol{x^2+y^2-4x-6y+3=0}$

5 《解答例》

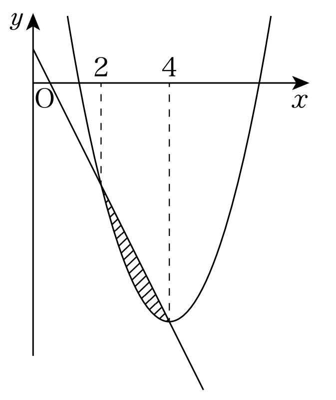
⑴　$f(x)=x^2-8x+9$ とおくと，$f'(x)=2x-8$ より $f'(1)=-6$ となる。よって，放物線 $y=f(x)$ 上の点（1，2）における接線の方程式は $y=-6(x-1)+2=\boldsymbol{-6x+8}$

⑵　放物線と直線の交点の x 座標は，方程式 $x^2-8x+9=-2x+1$ を解いて $x=\mathbf{2}$，$\mathbf{4}$ となる。求める面積は

$$\int_2^4\{(-2x+1)-(x^2-8x+9)\}\,dx$$

$$=\int_2^4(-x^2+6x-8)\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+3x^2-8x\right]_2^4=\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}$$



⑶　両辺を x で微分すると $\boldsymbol{f(x)=2x-8}$ となる。これを与式に代入して積分を計算すると $x^2-8x-a^2+8a=x^2-8x+9+2a$ となる。定数項を比較して $a^2-6a+9=0$ となり，a を求めると $\boldsymbol{a=3}$