2023年3月8日実施

●学力試験　数学●

1 《正解》

(1) $\boldsymbol{-4\sqrt{2}}$　(2) $\boldsymbol{-3 \leqq x \leqq \frac{1}{3}}$　(3) $\boldsymbol{x = \pm 1}$　(4) $\boldsymbol{4\sqrt{2}}$

(5) $\boldsymbol{\frac{54}{5} = 10.8}$　(6) $\boldsymbol{\frac{-1+3i}{5}}$　(7) $\boldsymbol{10}$　(8) $\boldsymbol{\sqrt{6}}$

《解き方》

(1) $\{(1+\sqrt{3})+\sqrt{2}\}\{(1+\sqrt{3})-\sqrt{2}\}=\{(1+\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2\}=1+2\sqrt{3}+3-2=2+2\sqrt{3}$

となるので，（与式）$=(2+2\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{6})=2\sqrt{2}\,\{1^2-(\sqrt{3})^2\}=\boldsymbol{-4\sqrt{2}}$

(2) 不等式の左辺を因数分解すると $(3x-1)(x+3) \leqq 0$ となるから，$\boldsymbol{-3 \leqq x \leqq \frac{1}{3}}$

(3) $2x+1 \geqq 0$ と仮定して $2x+1=x+2$ を解くと $x=1$ となり，これは仮定を満たす。また

$2x+1<0$ と仮定して $-(2x+1)=x+2$ を解くと $x=-1$ となり，これも仮定を満たす。

したがって解は $\boldsymbol{x=\pm 1}$

(4) $\angle C=30^\circ$ なので，正弦定理より $\frac{BC}{\sin 45^\circ}=\frac{4}{\sin 30^\circ}$ となる。これより，$BC=\boldsymbol{4\sqrt{2}}$

(5) 平均は $\overline{x}=\frac{1}{5}(97+99+102+93+94)=97$ なので，分散は

$$s^2=\frac{1}{5}\{(97-97)^2+\cdots+(94-97)^2\}=\frac{1}{5}(0+4+25+16+9)=\boldsymbol{\frac{54}{5}=10.8}$$

(6) $\frac{2i(3+i)}{(3-i)(3+i)}=\frac{6i-2}{3^2+1^2}=\boldsymbol{\frac{-1+3i}{5}}$

(7) $10^{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}=\boldsymbol{10}$

(8) $|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{AC}|^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+|\overrightarrow{AB}|^2=2^2-2\cdot 1+2^2=6$ より

$|\overrightarrow{BC}|=\boldsymbol{\sqrt{6}}$

2 《解答例》

(1) $\frac{17}{30}\pi=\frac{17}{30}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=\boldsymbol{102^\circ}$

(2) 付表を用いて，$\sin 102^\circ=\cos 12^\circ=\boldsymbol{0.9781}$

(3) k，ℓ を整数として $m=7k+2$，$n=7\ell+3$ とおくと，

$3n+2m=7(3\ell+2k)+13=7(3\ell+2k+1)+6$ となる。したがって，余りは $\boldsymbol{6}$

3 《解答例》

(1) 3回目に白で終了するのは黒，白，白の順に出る場合なので $\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{3}{5}=\boldsymbol{\dfrac{18}{125}}$

(2) 4回目に終了するのは黒，白，黒，黒の順に出る場合と，白，黒，白，白の順に出る場合の 2 通りである。それぞれの確率は $\left(\dfrac{2}{5}\right)^3\left(\dfrac{3}{5}\right)=\dfrac{24}{5^4}$，$\left(\dfrac{3}{5}\right)^3\left(\dfrac{2}{5}\right)=\dfrac{54}{5^4}$ である。

したがって求める確率は $\dfrac{54/5^4}{24/5^4+54/5^4}=\boldsymbol{\dfrac{9}{13}}$

(3) 白で終了する確率は $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{n-1}\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n-1}\left(\dfrac{3}{5}\right)^2$ であり，黒で終了する確率は

$\left(\dfrac{2}{5}\right)^{n-1}\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n-1}\left(\dfrac{2}{5}\right)^2$ である。したがって求める確率は

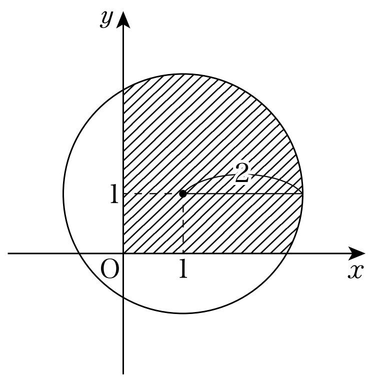
$$\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^2\right\}=\boldsymbol{\frac{13\cdot 6^{n-1}}{5^{2n}}}$$

4 《解答例》

(1) 式変形により $(x-1)^2+(y-1)^2=2^2$ となるので，

中心は $(\mathbf{1},\ \mathbf{1})$，半径は $\mathbf{2}$

(2) 右図の斜線部分で，境界線を含む。



(3) $x+y=k$ とおくと，これは傾き -1，切片 k の直線の方程式であり，切片 k が最大となるのは直線が点 $\left(1+\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2}\right)$ を通るときであるので，その値は

$\left(1+\sqrt{2}\right)+\left(1+\sqrt{2}\right)=\boldsymbol{2+2\sqrt{2}}$

5 《解答例》

(1) 直線 ℓ の方程式は $y=\dfrac{8-2}{2-(-1)}\{x-(-1)\}+2=\boldsymbol{2x+4}$

(2) 直線 ℓ と放物線の交点の x 座標は，方程式 $2x+4=x^2+x+2$ を解いて $x=-1,\ 2$ となる。

求める面積は

$$\int_{-1}^{2}\{(2x+4)-(x^2+x+2)\}\,dx=\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{2}=\boldsymbol{\frac{9}{2}}$$

(3) $f(x)=x^2+x+2$ とおくと，$f'(x)=2x+1$ より $f'(-1)=-1$ となる。よって，放物線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(-1,\ 2)$ における接線の方程式は $y=-1\cdot\{x-(-1)\}+2=\boldsymbol{-x+1}$